

Arithmetische Notiz.

Von dem c. M. **Leopold Gegenbauer.**

Bezeichnet man die Anzahl derjenigen Divisoren einer ganzen Zahl α, welche ihr nach dem Modul k congruent sind und einen complementären Divisor besitzen, der nach demselben Modul der positiven Einheit congruent ist, mit $A_0(\alpha)$, so besteht, wie eine einfache Rechnung ergibt, die Gleichung:

$$1)\quad \sum_{x=1}^{x=\sigma} A_0(kx-\rho) = \sum_{x=1}^{x=\sigma} \left[\frac{(k-1)x+\sigma-\rho}{kx-\rho}\right] \quad (\rho < k).$$

Es sei nun α_λ die Anzahl derjenigen Werthe von x, für welche:

$$\left[\frac{(k-1)x+\sigma-\rho}{kx-\rho}\right] = \lambda \qquad \text{ist.}$$

Alsdann sind die sämmtlichen Werthe von x, für welche λ gleich 1 ist:

$$x = \sigma, \sigma-1, \sigma-2, \ldots, \sigma-\alpha_1+1$$

und man hat daher die Relationen:

$$\frac{\sigma+(k-1)(\sigma-\alpha_1+1)-\rho}{k(\sigma-\alpha_1+1)-\rho} < 2$$

$$\frac{\sigma+(k-1)(\sigma-\alpha_1)-\rho}{k(\sigma-\alpha_1)-\rho} \geqq 2,$$

aus welchen folgt:

$$\sigma-\alpha_1 \leqq \frac{\sigma+\rho}{k+1} < \sigma-\alpha_1+1$$

und daher ist:

$$\alpha_1 = \sigma - \left[\frac{\sigma+\rho}{k+1}\right].$$

Es ist ferner:

$$\left[\frac{(k-1)x+\sigma-\rho}{kx-\rho}\right] = 2$$

für:

$$x = \sigma-\alpha_1,\ \sigma-\alpha_1-1,\ \sigma-\alpha_1-2,\ldots,\ \sigma-\alpha_1-\alpha_2+1$$

während diese ganze Zahl für:

$$x = \sigma-\alpha_1-\alpha_2$$

den Werth 3 erhält, und daher hat man die Beziehungen:

$$\frac{\sigma+(k-1)(\sigma-\alpha_1-\alpha_2+1)-\rho}{k(\sigma-\alpha_1-\alpha_2+1)-\rho} < 3$$

$$\frac{\sigma+(k-1)(\sigma-\alpha_1-\alpha_2)-\rho}{k(\sigma-\alpha_1-\alpha_2)-\rho} \geqq 3$$

oder auch:

$$\sigma-\alpha_1-\alpha_2 \leqq \frac{\sigma+2\rho}{2k+1} < \sigma-\alpha_1-\alpha_2+1.$$

Aus dieser Relation folgt:

$$\sigma-\alpha_1-\alpha_2 = \left[\frac{\sigma+2\rho}{2k+1}\right].$$

und daher ist:

$$\alpha_2 = \left[\frac{\sigma+\rho}{k+1}\right] - \left[\frac{\sigma+2\rho}{2k+1}\right].$$

Es sei nun:

$$2)\quad \alpha_\lambda = \left[\frac{\sigma+(\lambda-1)\rho}{(\lambda-1)k+1}\right] - \left[\frac{\sigma+\lambda\rho}{\lambda k+1}\right]$$

für:

$$\lambda = 1, 2, 3, \ldots, \lambda_1.$$

Zur Bestimmung von α_{λ_1+1} hat man die Relationen:

$$\frac{\sigma+(k-1)(\sigma-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_{\lambda_1+1}+1)-\rho}{k(\sigma-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_{\lambda_1+1}+1)-\rho} < \lambda_1+1$$

$$\frac{\sigma+(k-1)(\sigma-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_{\lambda_1+1})-\rho}{k(\sigma-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_{\lambda_1+1})-\rho} \geqq \lambda_1+1$$

also:

$$\sigma - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \ldots - \alpha_{\lambda_1+1} \leqq \frac{\sigma + (\lambda_1+1)\rho}{(\lambda_1+1)k+1} < \sigma - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \ldots - \alpha_{\lambda_1+1} + 1$$

aus welcher Relation folgt:

$$\sigma - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \ldots - \alpha_{\lambda_1+1} = \left[\frac{\sigma + (\lambda_1+1)\rho}{(\lambda_1+1)k+1}\right]$$

und daher ist:

$$\alpha_{\lambda_1+1} = \left[\frac{\sigma + \lambda_1\rho}{\lambda_1 k+1}\right] - \left[\frac{\sigma + (\lambda_1+1)\rho}{(\lambda_1+1)k+1}\right].$$

Da die Relation 2) für $\lambda = 1, 2$ bewiesen wurde, so gilt sie allgemein. Nun ist der grösste Werth, welchen die erwähnten ganzen Zahlen annehmen können:

$$3) \quad \left[\frac{\sigma - 1}{k - \rho}\right] + 1 = \tau$$

Derselbe wird für:

$$\alpha_\tau = \left[\frac{\sigma + (\tau-1)\rho}{(\tau-1)k+1}\right] - \left[\frac{\sigma + \tau\rho}{\tau k+1}\right]$$

Werthe von x angenommen.

Aus der Gleichung 3) folgt aber:

$$\tau + 1 > \frac{\sigma - 1}{k - \rho} + 1 \geqq \tau$$

und daher ist:

$$\tau k + 1 > \sigma + \tau\rho$$

also:

$$\left[\frac{\sigma + \tau\rho}{\tau k+1}\right] = 0.$$

Die Gleichung 1) verwandelt sich demnach in die folgende:

$$4) \quad \sum_{x=1}^{x=\sigma} A_0(kx - \rho) = \sigma + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-1}{k-\rho}\right]} \left[\frac{\rho x + \sigma}{kx+1}\right].$$

Man kann diese Gleichung auch in folgender Weise schreiben:

$$\sum_{x=1}^{x=\sigma} A_0(kx-\rho) = \sigma + \left[\frac{\sigma-1}{k-\rho}\right] + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-1}{k-\rho}\right]} \left[\frac{\sigma-1-(k-\rho)x}{kx+1}\right].$$

Ist $\tau-\tau_1$ die Anzahl derjenigen Werthe von x, für welche:

$$\left[\frac{\sigma-(k-\rho)x-1}{kx+1}\right] = 0$$

wird, so bestehen die Relationen:

$$\frac{\sigma-(k-\rho)\tau_1-1}{k\tau_1+1} < 1$$

$$\frac{\sigma-(k-\rho)(\tau_1-1)-1}{k(\tau_1-1)+1} \geqq 1$$

so ist:

$$\tau_1-1 \leqq \frac{\sigma-2}{2k-\rho} < \tau_1$$

Aus welcher Relation folgt:

$$\tau_1-1 = \left[\frac{\sigma-2}{2k-\rho}\right].$$

Man kann daher die letzte Gleichung auch in folgender Form schreiben:

$$5) \quad \sum_{x=1}^{x=\sigma} A_0(kx-\rho) = \sigma + \left[\frac{\sigma-1}{k-\rho}\right] + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-2}{2k-\rho}\right]} \left[\frac{\sigma-1-(k-\rho)x}{kx+1}\right].$$

Nun ist:

$$\left[\frac{\sigma-1}{k-\rho}\right] = \left[\frac{\sigma-2}{k-\rho}\right] + \varepsilon$$

wo ε den Werth $+1$ oder 0 hat, je nachdem:

$$\sigma \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}(k-\rho))$$

und daher:

$$k\sigma-\rho \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}(k-\rho))$$

ist, oder nicht.

Es ist ferner:

$$\left[\frac{\sigma-2}{2k-\rho}\right] = \left[\frac{\sigma-3}{2k-\rho}\right] + \eta$$

wo η den Werth $+1$ oder 0 besitzt, je nachdem σ der Congruenz:

$$\sigma \equiv 2 \ (\mathrm{mod.}\ (2k-\rho))$$

und daher $k\sigma-\rho$ der Congruenz:

$$k\sigma-\rho \equiv 0 \ (\mathrm{mod.} (2k-\rho))$$

genügt, oder nicht.

Schreibt man nun in den Gleichungen 4) und 5) für $\sigma : \sigma-1$ und subtrahirt die dadurch entstehenden Gleichungen von den ursprünglichen, so ergeben sich die Formeln:

$$6)\quad A_0(k\sigma-\rho) = 1+\varepsilon + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-2}{k-\rho}\right]} \left\{\left[\frac{\rho x+\sigma}{kx+1}\right] - \left[\frac{\rho x+\sigma-1}{kx+1}\right]\right\}$$

$$7)\quad A_0(k\sigma-\rho) = 1+\varepsilon+\eta+\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-3}{2k-\rho}\right]} \left\{\left[\frac{\sigma-1-(k-\rho)\,x}{kx+1}\right] - \left[\frac{\sigma-2-(k-\rho)x}{kx+1}\right]\right\}$$

Setzt man in den Formeln 4), 5), 6) und 7):

$$k = 2,\ \rho = 1$$

so erhält man die speciellen Relationen:

$$8)\quad \sum_{x=1}^{x=\sigma} \psi(2x-1) = \sigma + \sum_{x=1}^{x=\sigma-1} \left[\frac{x+\sigma}{2x+1}\right]$$

$$9)\quad \sum_{x=1}^{x=\sigma} \psi(2x-1) = 2\sigma-1 + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma-2}{3}\right]} \left[\frac{\sigma-1-x}{2x+1}\right]$$

$$10)\quad \psi(2\sigma-1) = 2 + \sum_{x=1}^{x=\sigma-2} \left\{\left[\frac{x+\sigma}{2x+1}\right] - \left[\frac{x+\sigma-1}{2x+1}\right]\right\}$$

$$11)\quad \psi(2\sigma-1) = 2+\eta + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sigma}{3}\right]-1} \left\{\left[\frac{\sigma-1-x}{2x+1}\right] - \left[\frac{\sigma-2-x}{2x+1}\right]\right\}$$

wo η den Werth $+1$ oder 0 hat, je nachdem $2\sigma-1$ durch 3 theilbar ist oder nicht und $\psi(\alpha)$ die Anzahl der Divisoren der Zahl α bezeichnet. Die speciellen Formeln 9) und 11) hat schon Herr V. Buniakowsky mitgetheilt.

Von den in den aufgestellten Gleichungen enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden besonders hervorgehoben werden:

Wenn für alle Werthe von x, welche nicht grösser als $\left[\frac{\alpha-k}{k(k-\rho)}-\frac{1}{k}\right]$ sind:

$$\left[\frac{\alpha}{k(kx+1)}+\frac{\rho}{k}\right]=\left[\frac{\alpha-k}{k(kx+1)}+\frac{\rho}{k}\right]$$

ist, so besitzt die nach dem Modul k der Zahl $-\rho$ congruente Zahl α ausser α höchstens einen ihr nach dem Modul k congruenten Theiler mit complementärem Divisor von der Form $k\lambda+1$, nämlich $k-\rho$.

Wenn für alle Werthe von x, welche nicht grösser als $\left[\frac{\alpha-k}{k(2k-\rho)}-\frac{1}{k}\right]$ sind:

$$\left[\frac{\alpha}{k(kx+1)}+\frac{\rho}{k}\right]=\left[\frac{\alpha-k}{k(kx+1)}+\frac{\rho}{k}\right]$$

ist, so besitzt die nach dem Modul k der Zahl $-\rho$ congruente Zahl α ausser α höchstens zwei ihr nach dem Modul k congruente Theiler mit complementärem Divisor von der Form $k\lambda+1$, nämlich $k-\rho$ und $2k-\rho$.

Eine nach dem Modul k der Zahl $-\rho$ congruente, durch $k-\rho$ nicht theilbare Zahl α ist keine Primzahl, wenn auch nur für einen $\left[\frac{\alpha-k}{k(k-\rho)}-\frac{1}{k}\right]$ nicht übersteigenden Werth von x:

$$\left[\frac{\alpha}{k(kx+1)}+\frac{\rho}{k}\right]>\left[\frac{\alpha-k}{k(kx+1)}+\frac{\rho}{k}\right]$$

ist.

Eine nach dem Modul k der Zahl $-\rho$ congruente, weder durch $k-\rho$ noch durch $2k-\rho$ theilbare Zahl ist keine Primzahl, wenn auch nur für einen $\left[\frac{\alpha-k}{k(2k-\rho)}-\frac{1}{k}\right]$ nicht übersteigenden Werth von x:

$$\left[\frac{\alpha}{k(kx+1)}+\frac{\rho}{k}\right] > \left[\frac{\alpha-k}{k(kx+1)}+\frac{\rho}{k}\right]$$

ist.

Eine ungerade Zahl α ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-3}{2}\right]$ nicht übersteigenden Werthe von x:

$$\left[\frac{\alpha}{2(2x+1)}+\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{\alpha-2}{2(2x+1)}+\frac{1}{2}\right]$$

ist.

Eine durch 3 nicht theilbare ungerade Zahl α ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-5}{6}\right]$ nicht übersteigenden Werthe von x:

$$\left[\frac{\alpha}{2(2x+1)}+\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{\alpha-2}{2(2x+1)}+\frac{1}{2}\right]$$

ist.

Eine ungerade Zahl α von der Form $3n-1$ ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-5}{6}\right]$ nicht übersteigenden Werthe von x:

$$\left[\frac{\alpha}{3(3x+1)}+\frac{1}{3}\right] = \left[\frac{\alpha-3}{3(3x+1)}+\frac{1}{3}\right]$$

ist.

Eine durch 5 nicht theilbare ungerade Zahl α von der Form $3n-1$ ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-8}{15}\right]$ nicht übersteigenden Werthe von x:

$$\left[\frac{\alpha}{3(3x+1)}+\frac{1}{3}\right] = \left[\frac{\alpha-3}{3(3x+1)}+\frac{1}{3}\right]$$

ist.

Eine durch 3 nicht theilbare Zahl α von der Form $4n-1$ ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-7}{12}\right]$ nicht übersteigenden Werthe von x:

$$\left[\frac{\alpha}{4(4x+1)}+\frac{1}{4}\right]=\left[\frac{\alpha-4}{4(4x+1)}+\frac{1}{4}\right]$$

ist.

Eine weder durch 3 noch durch 7 theilbare Zahl von der Form $4n-1$ ist eine Primzahl, wenn für alle $\left[\frac{\alpha-11}{28}\right]$ nicht übersteigenden Werthe von x:

$$\left[\frac{\alpha}{4(4x+1)}+\frac{1}{4}\right]=\left[\frac{\alpha-4}{4(4x+1)}+\frac{1}{4}\right]$$

ist.